RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

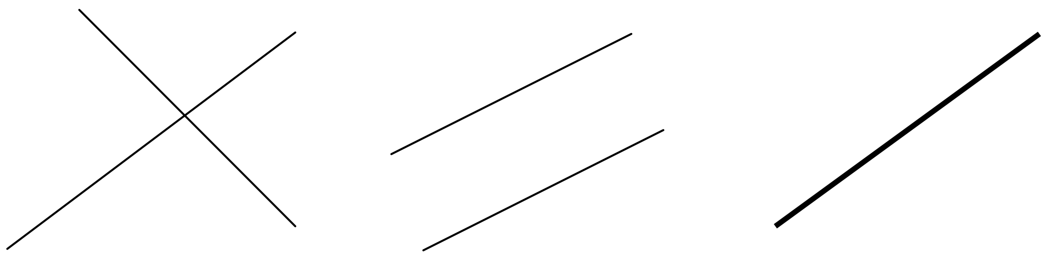
Empezaremos por un sistema de ecuaciones 2x2, es decir, dos ecuaciones con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones 2x2 es una expresión del siguiente tipo

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ a' \cdot x + b' \cdot y = c' \end{cases}$$

donde los coeficientes de x e y y los términos independientes son números reales, es decir, $a, b, a', b', c, c' \in \Re$.

Resolver el sistema es **encontrar los valores de x e y que verifican simultáneamente las dos ecuaciones**. Recordemos sin embargo que no siempre un sistema de ecuaciones tiene solución. De hecho, cada una de las ecuaciones del sistema representa una recta en el plano y dos rectas en el plano pueden estar de 3 formas diferentes: pueden cortarse en un punto, pueden ser paralelas o pueden ser coincidentes.



Rectas que se cortan en un punto $\Rightarrow$ una sóla solución. Hablamos de un sistema ***compatible determinado***. $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	Rectas paralelas $\Rightarrow$ no existe solución. Hablamos de un ***sistema incompatible***. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	Rectas coincidentes: infinitas soluciones. Hablamos de un sistema ***compatible indeterminado***. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Cuadro 1.

Un sistema de ecuaciones puede resolverse de varias formas diferentes: por **reducción, igualación, sustitución y gráficamente**. Antes de empezar con el método que hayamos elegido, habremos comprobado que el sistema tiene solución con los cuadros anteriores.

Método de reducción:

Como su nombre indica, se trata de reducir el sistema 2x2 a una sola ecuación. Se consigue igualando los coeficientes de una de las dos incógnitas (normalmente la que menos operaciones requiera) y restando las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} a\cdot x + b\cdot y = c \\ a'\cdot x + b'\cdot y = c' \end{cases}$$

Elegimos una incógnita, por ejemplo la x. Para conseguir que los coeficientes de la x sean iguales en la primera y en la segunda ecuación multiplico la primera por el coeficiente de la segunda y viceversa. Así:

$$\begin{cases} a\cdot a'\cdot x + b\cdot a'\cdot y = c\cdot a' \\ a'\cdot a\cdot x + b'\cdot a\cdot y = c'\cdot a \end{cases}$$

Ahora resto las dos expresiones. Como $aa' = a'a$

$$\begin{cases} a\cdot a'\cdot x + b\cdot a'\cdot y = c\cdot a' \\ -a'\cdot a\cdot x - b'\cdot a\cdot y = -c'\cdot a \end{cases}$$

$$0 + (b\cdot a'\cdot y - b'\cdot a\cdot y) = (c\cdot a' - c'\cdot a)$$

Una vez que ya he eliminado una incógnita, en este caso la "x", agrupo todos los términos que lleven "y" y despejo. Así:

$$y\cdot(b\cdot a' - b'\cdot a) = (c\cdot a' - c'\cdot a)$$

$$y = \frac{(c\cdot a' - c'\cdot a)}{(b\cdot a' - b'\cdot a)}$$

lo cual funciona siempre que el denominador de la fracción sea distinto de 0 (recuerda que no podemos dividir por 0). Esto lo hemos asegurado porque el sistema tiene solución y, por lo tanto, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

Ya tenemos la "y". Sustituimos en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtenemos la "x".

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

Comprobamos que el sistema de ecuaciones tiene solución aplicando las propiedades vistas en el cuadro 1:

$\frac{a}{a'}=\frac{3}{5}$ $\frac{b}{b'}=\frac{2}{3}$ y como $\frac{3}{5}\neq\frac{2}{3}$ (3*3 $\neq$ 2*5) podemos concluir que el sistema de ecuaciones es compatible determinado, tendrá una única solución.

Aplicamos el método de reducción para resolverlo:

Tal como hemos hecho teóricamente, elegimos la "x" para eliminarla de las 2 ecuaciones. El coeficiente de la "x" en la primera ecuación es 3 y en la segunda es 5, por lo que multiplicaremos la primera ecuación por 5 y la segunda por 3. Así:

$$\begin{cases} 3\cdot 5x + 2\cdot 5y = 4\cdot 5 \\ 5\cdot 3x + 3\cdot 3y = 7\cdot 3 \end{cases}$$

Hacemos las operaciones indicadas

$$\begin{cases} 15x + 10y = 20 \\ 15x + 9y = 21 \end{cases}$$

Y ahora restamos las 2 ecuaciones (o lo que es lo mismo cambiamos de signo una de ellas y sumamos)

$$\begin{cases} 15x + 10y = 20 \\ -15x - 9y = -21 \end{cases}$$

$$\{0x + (10-9)y = 20 - 21$$

$$y = -1$$

y sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones de nuestro sistema para conseguir la "x"

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow 3x + 2(-1) = 4 \Rightarrow 3x - 2 = 4 \Rightarrow$$
$$3x = 4 + 2 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

Método de sustitución:

Elegimos la incógnita que más fácilmente pueda despejarse en una de las ecuaciones y la sustituiremos en la otra ecuación:

$$\begin{cases} a\cdot x + b\cdot y = c \\ a'\cdot x + b'\cdot y = c' \end{cases}$$

Vamos a despejar la "y" en la primera ecuación:

$$b\cdot y = c - a\cdot x$$

$$y = \frac{c - a\cdot x}{b}$$

Ahora sustituimos el valor de “y” en la segunda ecuación:

$$a'\cdot x + b'\cdot \frac{c - a\cdot x}{b} = c'$$

$$b\cdot a'\cdot x + b'\cdot(c - a\cdot x) = b\cdot c'$$

$$b\cdot a'\cdot x + b'\cdot c - b'\cdot a\cdot x = b\cdot c'$$

$$b\cdot a'\cdot x - b'\cdot a\cdot x = b\cdot c' - b'\cdot c$$

$$x\cdot(b\cdot a' - b'\cdot a) = b\cdot c' - b'\cdot c$$

$$x = \frac{b\cdot c' - b'\cdot c}{b\cdot a' - b'\cdot a}$$

Si te fijas, este valor de “x” es válido siempre que el denominador sea distinto de 0, pero al igual que en el anterior método esto podemos asegurarlo porque $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

Despejamos la “y” en la primera ecuación:

$$2y = 4 - 3x \Rightarrow y = \frac{4-3x}{2}$$

y sustituimos el valor de “y” en la segunda ecuación:

$$5x + 3y = 7 \Rightarrow$$

$$5x + 3\frac{4-3x}{2} = 7 \Rightarrow$$

$$10x + 3(4-3x) = 14 \Rightarrow$$

$$10x + 12 - 9x = 14 \Rightarrow$$

$$10x - 9x = 14 - 12 \Rightarrow$$

$$x = 2$$

Una vez obtenido el valor de “x”, sustituimos en la expresión de “y” que hemos despejado al principio:

$$y = \frac{4-3x}{2} = \frac{4-3\cdot 2}{2} = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Método de igualación:

Elegiremos la incógnita que más fácilmente pueda despejarse en AMBAS ecuaciones y la despejaremos. Una vez hecho esto igualaremos los dos resultados. Supongamos que esa incógnita es la “x”

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

En la primera ecuación: $x=\dfrac{c-by}{a}$ y en la segunda ecuación: $x=\dfrac{c'-b'y}{a'}$. Como ambas expresiones han de ser iguales:

$$\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$$

$$a'(c-by)=a(c'-b'y)$$

$$a'c-a'by=ac'-ab'y$$

$$ab'y-a'by=ac'-a'c$$

$$y(ab'-a'b)=ac'-a'c$$

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

que es el mismo valor que habíamos obtenido para la “y” con el primer método (puedes comprobarlo como ejercicio. Para ello recuerda que *m-n = - (n-m)*)

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 5x+3y=7 \end{cases}$$

Despejamos las “x” en ambas ecuaciones. De la primera tendremos

$$3x=4-2y \Rightarrow x=\frac{4-2y}{3}$$

y de la segunda

$$5x=7-3y \Rightarrow x=\frac{7-3y}{5}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{7-3y}{5}=\frac{4-2y}{3}\Rightarrow 3(7-3y)=5(4-2y)\Rightarrow$$
$$21-9y=20-10y\Rightarrow$$
$$10y-9y=20-21\Rightarrow$$
$$y=-1$$

Y sustituyendo en cualquiera de las expresiones de la "x"

$$x=\frac{7-3y}{5}=\frac{7-3(-1)}{5}=\frac{7+3}{5}=\frac{10}{5}=2$$

Representación gráfica:

Para representar gráficamente una recta en el plano basta con calcular dos puntos por los que pasa y unirlos. Se hace lo mismo con las dos rectas y sobre el mismo sistema de ejes coordenados y tendremos el sistema resuelto.

Recuerda que antes de empezar a resolver un sistema de ecuaciones, debes comprobar si tiene o no solución utilizando las condiciones vistas en la primera hoja.

Ir al principio