

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x + 2y + 5z - \lambda = 2$$

$$2x - y - z + \lambda = 3$$

$$x + y + 3z - 2\lambda = 4$$

λ es un número real cualquiera

Se trata de un sistema de ecuaciones 3x3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) y un parámetro, λ , en función del cual obtendremos las soluciones x , y , z .

De la tercera ecuación despejamos la x y el valor obtenido lo sustituiremos en las 2 primeras ecuaciones, logrando así un sistema 2x2.

$$x + y + 3z - 2\lambda = 4 \rightarrow x = 4 - y - 3z + 2\lambda$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3(4 - y - 3z + 2\lambda) + 2y + 5z - \lambda = 2 \rightarrow 12 - 3y - 9z + 6\lambda + 2y + 5z - \lambda = 2$$

$$y \text{ agrupando: } -y - 4z = -10 - 5\lambda \rightarrow y + 4z = 10 + 5\lambda$$

Hacemos lo mismo con la segunda ecuación:

$$2(4 - y - 3z + 2\lambda) - y - z + \lambda = 3 \rightarrow 8 - 2y - 6z + 4\lambda - y - z + \lambda = 3, \quad y$$

$$\text{agrupamos: } -3y - 7z = -5 - 5\lambda \rightarrow 3y + 7z = 5 + 5\lambda$$

Tenemos pues un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} y + 4z = 10 + 5\lambda \\ 3y + 7z = 5 + 5\lambda \end{array} \right\} \rightarrow \text{multiplicamos la 1ª por 3} \quad \left. \begin{array}{l} 3y + 12z = 30 + 15\lambda \\ 3y + 7z = 5 + 5\lambda \end{array} \right\} \rightarrow y$$

$$\text{restamos: } 5z = 25 + 10\lambda, \text{ con lo que } z = 5 + 2\lambda$$

Sustituyo este valor en la primera ecuación del sistema anterior para calcular la y

$$y + 4z = 10 + 5\lambda \rightarrow y + 4(5 + 2\lambda) = 10 + 5\lambda \rightarrow y + 20 + 8\lambda = 10 + 5\lambda, \text{ con lo que } y = -10 - 3\lambda$$

Finalmente sustituimos los valores obtenidos en la expresión de x

$$x = 4 - y - 3z + 2\lambda \rightarrow x = 4 - (-10 - 3\lambda) - 3(5 + 2\lambda) + 2\lambda$$

$$\rightarrow x = 4 + 10 + 3\lambda - 15 - 6\lambda + 2\lambda$$

$$\text{Y agrupando: } x = -1 - \lambda$$

Para comprobar las soluciones, sustituimos los valores obtenidos en el sistema del principio y deberemos obtener identidades:

$$3x + 2y + 5z - \lambda = 2$$

$$\rightarrow 3(-1 - \lambda) + 2(-10 - 3\lambda) + 5(5 + 2\lambda) - \lambda = -3 - 3\lambda - 20 - 6\lambda + 25 + 10\lambda - \lambda = 2$$

$$2x - y - z + \lambda = 3$$

$$\rightarrow 2(-1 - \lambda) - (-10 - 3\lambda) - (5 + 2\lambda) + \lambda = -2 - 2\lambda + 10 + 3\lambda - 5 - 2\lambda + \lambda = 3$$

$$x + y + 3z - 2\lambda = 4$$

$$\rightarrow (-1 - \lambda) + (-10 - 3\lambda) + 3(5 + 2\lambda) - 2\lambda = -1 - \lambda - 10 - 3\lambda + 15 + 6\lambda - 2\lambda = 4$$