Resolver la siguiente inecuación: $\frac{3x+1}{x^2-9} \leq 0$

Por pasos:

1) Calculamos las raíces de todos los polinomios que intervienen en la expresión dada.

Numerador: $3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{3}$

Denominador: $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

De esta forma, puedo escribir la expresión de la inecuación así:

$$\frac{3x+1}{x^2-9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x+\frac{1}{3})}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

Tengo que calcular cuando un cociente es negativo (≤ 0), para ello vamos a estudiar el signo de cada uno de los factores en los diferentes intervalos en los que dividen a la recta real las raices que hemos calculado en el paso 1.

Construimos una tabla en la que aparecen ordenadas las raíces de menor a mayor en la fila superior y los factores correspondientes a esas raíces en la 1ª columna.

	-∞	-3	-1/3	3	+∞
x+3	-	+	+	+	
$3(x+\frac{1}{3})$	-	-	+	+	
x+3	-	-	-	+	
TOTAL	-	+	-	+	

Para estudiar el signo en cada uno de los intervalos, basta con elegir un valor de dicho intervalo y sustituir en el factor correspondiente. Por ejemplo, ¿cómo será el signo de $3(x+\frac{1}{3})$ en el intervalo (-3,-1/3)?. Elijo un valor en dicho intervalo, por ejemplo el (-2) y sustituyo: $3(-2+\frac{1}{3})$ = $3(\frac{-5}{3})$ = -5, que es negativo, luego en la correspondiente casilla aparecerá un signo negativo. Una vez completada de esta forma tan sencilla la tabla, sólo tengo que multiplicar los signos de los diferentes factores para saber cuál es el signo de la expresión entera en cada uno de los intervalos y estudiar lo que pasa en los extremos de los mismos para saber si son abiertos, cerrados…

En nuestro caso nos piden averiguar cuándo es $\frac{3x+1}{x^2-9} \le 0$

	-∞	-3	-1/3	3	+∞
x+3	-	+	+	+	
$3(x+\frac{1}{3})$	-	-	+	+	
x+3	-	-	-	+	
TOTAL	-	+	-	+	

La expresión es negativa entre -∞ y -3 y entre -1/3 y 3. Analizamos ahora los extremos:

-3 no puede entrar porque es una raíz del denominador y no podemos dividir por 0

-1/3 entra porque anula al numerador y me están pidiendo los valores que hacen que la expresión sea negativa o 0.

3 no puede entrar porque es una raíz del denominador, igual que -3.

La solución es pues:

$$\left(-\infty,-3\right)\cup\left[-\frac{1}{3},3\right)$$

Que escrita de otra forma es:

$$\{x\in\Re \ tales\ que -\infty < x < -3\}\cup\left\{x\in\Re \ tales\ que -\frac{1}{3}\le x < 3\right\}$$

y, gráficamente:

Ir al principio.