Resolver la siguiente inecuación: $\dfrac{4x+x^2-2}{x^2+x} > \dfrac{x^2-2}{x}$

Resolución:

Como no conocemos el signo que tienen cada uno de los componentes del cociente anterior, no podemos multiplicar en cruz, ya que podríamos estar cambiando el signo de la desigualdad con cada uno de los productos. En estos casos lo que debe hacerse es realizar las operaciones necesarias para conseguir sólo una fracción. Así:

$$\frac{4x+x^2-2}{x^2+x} > \frac{x^2-2}{x} \Leftrightarrow \frac{4x+x^2-2}{x^2+x} - \frac{x^2-2}{x} > 0$$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$\left.\begin{array}{l} x^2+x = x(x+1) \\ x = x \end{array}\right\}$ de donde se deduce que m.c.m. = x(x+1).

$$\frac{4x+x^2-2}{x^2+x} - \frac{x^2-2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x+x^2-2}{x^2+x} - \frac{(x^2-2)(x+1)}{x(x+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x+x^2-2}{x^2+x} - \frac{(x^3+x^2-2x-2)}{x^2+x} > 0$$

$$\frac{4x+x^2-2-x^3-x^2+2x+2}{x^2+x} > 0 \Leftrightarrow \frac{6x-x^3}{x^2+x} > 0$$

$\dfrac{6x-x^3}{x^2+x} > 0$ (sacando factor común) $\dfrac{x(6-x^2)}{x(x+1)} > 0$ (como x no puede ser 0, ya que entonces tendríamos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, puedo simplificar por x en numerador y denominador) $\dfrac{(6-x^2)}{(x+1)} > 0$. Para que un cociente sea positivo, numerador y denominador deben tener el mismo signo, es decir, o ambos son positivos o ambos son negativos. Con esto tengo dos casos que resolver:

A) $\left.\begin{array}{l} 6-x^2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \\ x > -1 \end{array}\right\}$, cuya solución es $\left(-1\,,\,\sqrt{6}\right)$, y gráficamente

B) $\left.\begin{array}{l} 6-x^2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x < -\sqrt{6} \;o\; x > \sqrt{6} \\ x < -1 \end{array}\right\}$, cuya solución es $\left(-\infty\,,\,-\sqrt{6}\right)$ y, gráficamente

Por tanto la solución de nuestro problema es la unión de los intervalos solución de los dos casos, así

$$\frac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} > \frac{x^2 - 2}{x} \Leftrightarrow x \in \left(-1\, ,\, \sqrt{6}\right) \cup \left(-\infty\, ,\, -\sqrt{6}\right)$$

Inicio del problema